



COLEGIUL NAȚIONAL AL. I. CUZA, FOCȘANI
Concursul de matematică MaThink
Ediția III – 23.01.2025
Clasa a XI-a



CLASA a XI-a; VARIANTA B- Timp de lucru 90 min

1.A 10p	Dacă $b_1 b_2, b_3, \dots, b_n$ este o progresie geometrică cu toți termenii pozitivi astfel încât $n = 7$, $b_1 + b_2 + b_3 = 26$, $b_5 + b_6 + b_7 = 2106$, atunci:										
	a) $b_7 = 5108$	b) $b_7 = 1506$	c) $b_7 = 1530$	d) $b_7 > 2000$	e) $b_7 = 1458$	f) $b_7 = 2154$					
2.A 10p	Mulțimea soluțiilor ecuației $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 2 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$ este :										
a)	$S = \left\{1; \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}\right\}$	b)	$S = \left\{1; \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\right\}$	c)	$S = \left\{1; \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}\right\}$	d)	$S = \{1\}$	e)	$S = \{1; 2\}$	f)	$S = \{1; 10; 100\}$
3.A 10p	Să se rezolve ecuația $\log_2 x + \log_3 x = 1$.										
	a) $x = 10^{lg 6}$	b) $x = 10^{lg 2}$	c) $x = 10^{\frac{lg 2 \cdot lg 3}{lg 6}}$	d) $x = 10^{lg 3}$	e) $x = 10^{lg 2 \cdot lg 3}$	f) nu are soluții					
4.B 15p	Fie $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ și $S = (2\varepsilon + \varepsilon^2)(2\varepsilon^2 + \varepsilon)$. Atunci:										
a)	$S = 3$	b)	$S = 1$	c)	$S = \varepsilon$	d)	$S = \varepsilon^2$	e)	$S = \varepsilon + \varepsilon^2$	f)	$S = 2$
5.B 15p	Fie $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\operatorname{tg} x}}{e^{\sin 2x} - e^{\operatorname{tg} 2x}}$. Atunci:										
a)	$l = 0$	b)	$l = \frac{1}{8}$	c)	$l = \infty$	d)	$l = \frac{1}{4}$	e)	$l = \frac{1}{2}$	f)	limita nu există
6.C 20p	Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{4^x - 6^x + 9^x}{4^x + 6^x + 9^x}$. Notăm $I = f(\mathbb{R})$. Atunci:										
a)	$I = [0; 1]$	b)	$I = \left[\frac{1}{3}; 3\right]$	c)	$I = \left[\frac{1}{3}; 1\right)$	d)	$I = \left[\frac{1}{3}; \infty\right]$	e)	$I = (-1; 1)$	f)	$I = (0; 1)$
7.B 15p	Să se determine termenul care nu conține pe x din dezvoltarea: $\left(ax^{-\frac{1}{2}} + xa^{-\frac{1}{2}}\right)^{30}$, $a, x \in \mathbb{R}$										
a)	T_{11}	b)	T_8	c)	T_{20}	d)	T_9	e)	T_{12}	f)	T_{10}
8.C 20p	Pentru ce valori ale parametrului real m , sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y + z = m \end{cases}$ are soluție unică?										
a)	$m = \left(0, \frac{1}{2}\right)$	b)	$m \in \mathbb{R}$	c)	$m \in \emptyset$	d)	$m = 0$	e)	$m = \frac{1}{2}$	f)	$m = -\frac{1}{2}$
4.B 15p	Să se calculeze: $l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n + x^{n-1} - 2}{x-1}$										
a)	nu există	b)	$l = 1$	c)	$l = \infty$	d)	$2n + 1$	e)	$l = 2n - 1$	f)	$l = n$
5.C 20p	Fie șirul $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2+k}{n^3+k^2}$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ este:										
a)	$\frac{1}{2}$	b)	$\frac{2}{3}$	c)	$\frac{1}{8}$	d)	$\frac{1}{3}$	e)	$\frac{4}{3}$	f)	$\frac{1}{4}$



COLEGIUL NAȚIONAL AL. I. CUZA, FOCȘANI
Concursul de matematică MaThink
Ediția III – 23.01.2025
Clasa a XI-a



GRILĂ CONCURS CLASA a XI-a VARIANTA B

Nr. problemă/ variante de răspuns	a)	b)	c)	d)	e)	f)
1. 10p					x	
2. 10p	x					
3. 10p			x			
4. 15p	x					
5. 15p		x				
6. 20p			x			
7. 15p	x					
8. 20p						x
9. 15p					x	
10. 20p				x		



SOLUȚII VARIANTA B Clasa a 11a :

1. Dacă $b_1 b_2, b_3, \dots, b_n$ este o progresie geometrică cu toți termenii pozitivi astfel încât $n = 7$,

$$b_1 + b_2 + b_3 = 26, \quad b_5 + b_6 + b_7 = 2106, \text{ atunci:}$$

Sol: $b_1 + b_2 + b_3 = 26 \Leftrightarrow b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = 26 \quad (1)$

$$b_5 + b_6 + b_7 = 2106 \Leftrightarrow b_1 q^4 + b_1 q^5 + b_1 q^6 = 2106 \Leftrightarrow q^4(b_1 + b_1 q + b_1 q^2) = 2106 \quad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow q^4 \cdot 26 = 2106 \Rightarrow q^4 = 81 \Rightarrow q = \pm 3$. Dar $b_n > 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$,

de unde rezultă $q = 3, b_1 = 2. b_7 = b_1 q^6 \Rightarrow b_7 = 1458$.

2. Mulțimea soluțiilor ecuației $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 2 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$ este :

1. **Sol:** $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 2 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 =$

1

$$x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{5}. \quad S = \left\{ 1; \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{5} \right\}.$$

3. Să se rezolve ecuația $\log_2 x + \log_3 x = 1$.

Sol: Condiție : $x > 0 \Rightarrow x \in (0; +\infty)$.

$$\log_2 x + \log_3 x = 1 \Leftrightarrow \frac{\lg x}{\lg 2} + \frac{\lg x}{\lg 3} = 1 \Leftrightarrow \lg x \left(\frac{1}{\lg 2} + \frac{1}{\lg 3} \right) = 1 \Leftrightarrow \lg x \cdot \frac{\lg 2 + \lg 3}{\lg 2 \cdot \lg 3} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lg x = \frac{\lg 2 \cdot \lg 3}{\lg 2 + \lg 3} \Leftrightarrow \lg x = \frac{\lg 2 \cdot \lg 3}{\lg 6} \Rightarrow x = 10^{\frac{\lg 2 \cdot \lg 3}{\lg 6}}.$$

4. Fie $\mathcal{E} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ și $S = (2\mathcal{E} + \mathcal{E}^2)(2\mathcal{E}^2 + \mathcal{E})$. Atunci:

Sol: Avem $\mathcal{E}^3 = 1 \Rightarrow \mathcal{E}^2 + \mathcal{E} + 1 = 0 \Rightarrow S = (\mathcal{E} - 1)(\mathcal{E}^2 - 1) = \mathcal{E}^3 + 1 - \mathcal{E} - \mathcal{E}^2 = 3$.

5. Fie

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\operatorname{tg} x}}{e^{\sin 2x} - e^{\operatorname{tg} 2x}}.$$

Atunci:

Sol: $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\operatorname{tg} x}}{e^{\sin 2x} - e^{\operatorname{tg} 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} (e^{\sin x - \operatorname{tg} x} - 1)}{e^{\operatorname{tg} 2x} (e^{\sin 2x - \operatorname{tg} 2x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{e^{\operatorname{tg} 2x}} \cdot \frac{e^{\sin x - \operatorname{tg} x} - 1}{\sin x - \operatorname{tg} x}.$

$$\frac{\sin 2x - \operatorname{tg} 2x}{e^{\sin 2x - \operatorname{tg} 2x} - 1} \cdot \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{\sin 2x - \operatorname{tg} 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} \cdot \frac{1 - \cos x}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \left(\frac{\sin x}{2} \right)^2}{2(\sin x)^2} =$$

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{x^2}{4} \cdot \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{8}.$$



COLEGIUL NAȚIONAL AL. I. CUZA, FOCȘANI
Concursul de matematică MaThink
Ediția III – 23.01.2025
Clasa a XI-a



6. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4^x - 6^x + 9^x}{4^x + 6^x + 9^x}$. Notăm $I = f(\mathbb{R})$. Atunci:

Sol: $f(x) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^x}$. Notăm $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x > 0$ Atunci: $f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + t + 1}$ și I se obține punând condiția ca

ecuația $\frac{t^2 - t + 1}{t^2 + t + 1} = y$ să aibă soluții reale pozitive, nenule. $\frac{t^2 - t + 1}{t^2 + t + 1} = y \Leftrightarrow (1 - y)t^2 - t(y + 1) + 1 - y = 0$

Pentru soluții reale pozitive, nenule, se impun condițiile: $\Delta_t \geq 0$, $S = t_1 + t_2 = -\frac{b}{a} > 0$, $P = t_1 t_2 = \frac{c}{a} > 0$

$\Delta_t \geq 0 \Leftrightarrow (3y - 1)(3 - y) \geq 0 \Leftrightarrow t \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$, $S = -\frac{b}{a} > 0 \Leftrightarrow y \in [-1, 1)$, $P = \frac{c}{a} > 0 \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}$ și făcând intersecție se obține $I = \left[\frac{1}{3}, 1\right)$

7. Să se determine termenul care nu conține pe x din dezvoltarea: $\left(ax^{-\frac{1}{2}} + xa^{-\frac{1}{2}}\right)^{30}$, $a, x \in \mathbb{R}$

Sol: $T_{k+1} = C_{30}^k \left(ax^{-\frac{1}{2}}\right)^{30-k} \left(xa^{-\frac{1}{2}}\right)^k = C_{30}^k x^{\frac{3k-30}{2}} a^{30-\frac{3k}{2}}$, $3k - 30 = 0$, $k = 10$. Deci T_{11} , termenul căutat

8. Pentru ce valori ale parametrului real m , sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y + z = m \end{cases}$ are soluție unică?

Sol: Se adună ecuațiile membru cu membru și se scrie ecuația obținută sub forma:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{m + \frac{1}{2}}\right)^2, \text{ de unde rezultă } m = -\frac{1}{2}, x = y = -\frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}.$$

9. Să se calculeze: $l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n + x^{n-1} - 2}{x-1}$

$$\begin{aligned} \text{Sol: } l &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1 + x^{n-1} - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1) + (x-1)(x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + 1)}{(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1 + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + 1) = 2n - 1 \end{aligned}$$

10. Fie șirul $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + k}{n^3 + k^2}$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ este:

$$\text{Sol: Avem: } \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + k}{n^3 + n^2} \leq a_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + k}{n^3 + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{n^3 + n^2} \sum_{k=1}^n (k^2 + k) \leq a_n \leq \frac{1}{n^3 + 1} \sum_{k=1}^n (k^2 + k)$$

$$\frac{1}{n^3 + n^2} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \leq a_n \leq \frac{1}{n^3 + 1} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \leq a_n. \text{ Folosind teoreme cleștelui se obține: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}$$