COLEGIUL NAȚIONAL AL. I. CUZA, FOCȘANI
Concursul de matematică MaThink
Ediția II – 23.01.2024
Clasa a XI-a

CLASA a XI-a; VARIANTA A - Timp de lucru 90 min

1.C 20p	Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{4^x-6^x+9^x}{4^x+6^x+9^x}$. Notăm $I=f(\mathbb{R})$. Atunci:				
a) $I=[0;1]$	b) $I=\left[\frac{1}{3};3\right]$	c) $I=\left[\frac{1}{3};1\right)$	d) $I=\left[\frac{1}{3};\infty\right]$	e)$I=(-1;1)$	f) $I=(0;1)$
2.B 15p	Să se determine termenul care nu conține pe x din dezvoltarea: $\left(ax^{-\frac{1}{2}}+xa^{-\frac{1}{2}}\right)^{30}$, $a,x\in\mathbb{R}$				
a) T_{11}	b) T_8	c) T_{20}	d) T_9	e) T_{12}	f) T_{10}
3.C 20p	Pentru ce valori ale parametrului real m, sistemul $\begin{cases} x^2+y^2=z \\ x+y+z=m \end{cases}$ are soluție unică?				
a) $m=\left(0,\frac{1}{2}\right)$	b) $m\in\mathbb{R}$	c) $m\in\emptyset$	d) $m=0$	e) $m=\frac{1}{2}$	f) $m=-\frac{1}{2}$
4.B 15p	Să se calculeze: $l=\lim_{x\to 1}\frac{x^n+x^{n-1}-2}{x-1}$				
a) nu există	b) $l=1$	c) $l=\infty$	d) $2n-1$	e) $l=2n+1$	f) $l=n$
5.C 20p	Fie șirul $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k}{n^3+k^2}$. Atunci $\lim_{n\to\infty}a_n$ este:				
a) $\frac{1}{2}$	b) $\frac{1}{3}$	c) $\frac{1}{8}$	d) $\frac{2}{3}$	e) $\frac{4}{3}$	f) $\frac{1}{4}$
6.A 10p	Dacă $b_1b_2,b_3,\dots\dots,b_n$ este o progresie geometrică cu toți termenii pozitivi astfel încât $n=7$, $b_1+b_2+b_3=26$, $b_5+b_6+b_7=2106$, atunci:				
a) $b_7=5108$	b) $b_7=1506$	c) $b_7=1530$	d) $b_7>2000$	e) $b_7=2154$	f) $b_7=1458$
7.A 10p	Mulțimea soluțiilor ecuației $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 2 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}=0$ este :				
a) $S=\left\{1;\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}\right\}$	b) $S=\left\{1;\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\right\}$	c) $S=\left\{1;\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{7}\right\}$	d) $S=\{1\}$	e) $S=\{1;2\}$	f) $S=\{1;10;100\}$
8.A 10p	Să se rezolve ecuația $\log_2 x+\log_3 x=1$.				
a) $x=10^{lg\,6}$	b) $x=10^{lg\,2}$	c) $x=10^{lg\,3}$	d) $x=10^{\frac{\lg 2\cdot\lg 3}{\lg 6}}$	e) $x=10^{lg2\cdot lg3}$	f) limita nu există
9.B 15p	Fie $\mathcal{E}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ și $S=(2\mathcal{E}+\mathcal{E}^2)(2\mathcal{E}^2+\mathcal{E})$. Atunci:				
a) S = 3	b) S = 1	c) S = $\mathcal{E}$	d) S = $\mathcal{E}^2$	e) S = $\mathcal{E}+\mathcal{E}^2$	f) S=2
10.B 15p	Fie $l=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^{\operatorname{tg} x}}{e^{\sin 2x}-e^{tg\,2x}}$. Atunci:				
a) $l=0$	b) $l=\frac{1}{2}$	c) $l=\infty$	d) $l=\frac{1}{4}$	e) $l=\frac{1}{8}$	f) limita nu există

GRILĂ CONCURS CLASA a XI-a VARIANTA A

Nr. problemă/ variante de răspuns	a)	b)	c)	d)	e)	f)
1. 20p			x			
2. 15p	x					
3. 20p						x
4. 15p				x		
5. 20p		x				
6. 10p						x
7. 10p	x					
8. 10p				x		
9. 15p	x					
10. 15p					x	

SOLUȚII VARIANTA A Clasa a 11a :

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{4^x-6^x+9^x}{4^x+6^x+9^x}$. Notăm $I=f(\mathbb{R})$. Atunci:

Sol: $f(x)=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1+\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1+\left(\frac{3}{2}\right)^x}$. Notăm $t=\left(\frac{2}{3}\right)^x>0$ Atunci: $f(t)=\frac{t^2-t+1}{t^2+t+1}$ și I se obține punând condița ca ecuatia $\frac{t^2-t+1}{t^2+t+1}=y$ să aibă soluții reale pozitive, nenule. $\frac{t^2-t+1}{t^2+t+1}=y \Leftrightarrow (1-y)t^2-t(y+1)+1-y=0$

Pentru soluții reale pzitive, nenule, se impun condițiile: $\Delta_t\geq 0, S=t_1+t_2=-\frac{b}{a}>0, P=t_1t_2=\frac{c}{a}>0$

$\Delta_t\geq 0 \Leftrightarrow (3y-1)(3-y)\geq 0 \ \Leftrightarrow t\in\left[\frac{1}{3},1\right], S=-\frac{b}{a}>0 \Leftrightarrow y\in[-1,1), P=\frac{c}{a}>0 \Leftrightarrow y\in R$ și făcând intersecție se obține $I=\left[\frac{1}{3},1\right)$

2. Să se determine termenul care nu conține pe x din dezvoltarea: $\left(ax^{-\frac{1}{2}}+xa^{-\frac{1}{2}}\right)^{30}, a,x\in\ \mathbb{R}$

Sol: $T_{k+1}=C_{30}^k\left(ax^{-\frac{1}{2}}\right)^{30-k}\left(xa^{-\frac{1}{2}}\right)^k=C_{30}^k x^{\frac{3k-30}{2}}a^{30-\frac{3k}{2}}, 3k-30=0, k=10. \mathit{Deci}\ \ T_{11}$, termenul căutat

3. Pentru ce valori ale parametrului real m, sistemul $\begin{cases} x^2+y^2=z \\ x+y+z=m \end{cases}$ are soluție unică?

Sol: Se adună ecuațiile membru cu membru și se scrie ecuația obținută sub forma:

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{m+\frac{1}{2}}\right)^2$, de unde rezultă $m=-\frac{1}{2}, x=y=-\frac{1}{2}, z=\frac{1}{2}$.

4. Să se calculeze: $l=\lim_{x\to 1}\frac{x^n+x^{n-1}-2}{x-1}$

Sol: $l=\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1+x^{n-1}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)+(x-1)(x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+1)}{(x-1)}=$
$=\lim\limits_{x\to 1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+1)=2n-1$

5. Fie șirul $a_n=\sum_{k=1}^n\frac{k^2+k}{n^3+k^2}$. Atunci $\lim_{n\to\infty}a_n$ este:

Sol: Avem: $\sum_{k=1}^n\frac{k^2+k}{n^3+n^2}\leq a_n\leq\sum_{k=1}^n\frac{k^2+k}{n^3+1}\Leftrightarrow\frac{1}{n^3+n^2}\sum_{k=1}^n(k^2+k)\leq a_n\leq\frac{1}{n^3+1}\sum_{k=1}^n(k^2+k)$

$\frac{1}{n^3+n^2}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\leq a_n\leq\frac{1}{n^3+1}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\leq a_n$. Folosind teoreme cleștelui se obține: $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$

6. Dacă $b_1b_2, b_3, \ldots\ldots, b_n$ este o progresie geometrică cu toți termenii pozitivi astfel încât $n=7$, $b_1+b_2+b_3=26,\ b_5+b_6+b_7=2106$, atunci:

Sol: $b_1+b_2+b_3=26 <=> \ b_1+b_1q+b_1q^2=26\ (1)$

$b_5+b_6+b_7=2106 <=> b_1q^4+b_1q^5+b_1q^6=2106\ <=>\ q^4(b_1+b_1q+b_1q^2)=2106\ \ (2)$

Din (1) și (2)=> $q^4\cdot 26=2106 => q^4=81 => q=\pm 3$. Dar

$b_n>0, oricare\ ar\ fi\ n\in\mathbb{N}^*,\ de\ unde\ rezultă\ q=3,\ \ b_1=2\ .\ \ \ b_7=\ b_1q^6 =>\ \ b_7=1458.$

7. Mulțimea soluțiilor ecuației $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 2 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}=0$ este :

1. **Sol:** $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 2 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}=0 <=> x^3-2x^2+1=0\ <=> (x-1)(x^2-x-1)=0 => x_1=1$

$x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$. $S = \left\{1; \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}\right\}$.

8. Să se rezolve ecuația $\log_2 x + \log_3 x = 1$.

Sol: Condiție : $x > 0 => x \in (0; +\infty)$.

$$\log_2 x + \log_3 x = 1 <=> \frac{lgx}{lg2} + \frac{lgx}{lg3} = 1 <=> lgx\left(\frac{1}{lg2} + \frac{1}{lg3}\right) = 1 <=> lgx \cdot \frac{lg2 + lg3}{lg2 \cdot lg3} = 1$$

$$<=> lgx = \frac{lg2 \cdot lg3}{lg2 + lg3} <=> \lg x = \frac{lg2 \cdot lg3}{lg6} => x = 10^{\frac{\lg 2 \cdot \lg 3}{\lg 6}}.$$

9. Fie $\mathcal{E} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ și $S = (2\mathcal{E} + \mathcal{E}^2)(2\mathcal{E}^2 + \mathcal{E})$. Atunci:
Sol: Avem $\varepsilon^3 = 1 => \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0 => S = (\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 - 1) = \varepsilon^3 + 1 - \varepsilon - \varepsilon^2 = 3$.

10. Fie
$l = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\operatorname{tg} x}}{e^{\sin 2x} - e^{tg\, 2x}}$.
Atunci:

Sol: $l = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\operatorname{tg} x}}{e^{\sin 2x} - e^{tg\, 2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x}(e^{\sin x - tgx} - 1)}{e^{\operatorname{tg} 2x}(e^{\sin 2x - tg2x} - 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{e^{\operatorname{tg} 2x}} \cdot \frac{e^{\sin x - tgx} - 1}{\sin x - tgx} \cdot$

$$\frac{\sin 2x - tg2x}{e^{\sin 2x - tg2x} - 1} \cdot \frac{\sin x - tgx}{\sin 2x - tg2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} \cdot \frac{1 - \cos x}{1 - \cos 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{2(\sin x)^2} = \quad =$$

$$\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \cdot \frac{x^2}{4} \cdot \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{8}.$$