OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală-10.02.2024

Clasa a IX-a

Bareme

1) Arătați că dacă $x, y \in (-2, \infty)$ și $x + y = 4$, atunci $\sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} \le 4$.

Soluție:

$x, y \in (-2, \infty) \Rightarrow x+2, y+2 \in (0, \infty)$ deci se poate aplica inegalitatea mediilor.......2p

$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, unde $a, b \in (0, \infty)$ ……………………..................................2p

$\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}{2} \le \sqrt{\frac{x+2+y+2}{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = 2$ ……………………....……......……2p

$\sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} \le 4$ ……………………...……...1p

2) Determinați numerele reale nenule x cu proprietatea că unul dintre numerele $x, \{x\}$ si $[x]$ este media aritmetică a celorlalte două (unde $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x).

Soluție:

<u>Cazul 1</u>: $2x = [x] + \{x\} \Leftrightarrow 2x = x \Leftrightarrow x = 0$ imposibil($x \neq 0$)..2p

<u>Cazul 2:</u> $2\{x\} = x + [x] \Leftrightarrow \{x\} = 2[x] \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{x\} = 0 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow x = 0$ imposibil($x \neq 0$)....2p

<u>Cazul 3:</u> $2[x] = x + \{x\} \Leftrightarrow [x] = 2\{x\} \in [0, 2)$ iar partea întreagă este număr întreg..........1p

Dacă $[x] = 0 \Rightarrow \{x\} = 0 \Rightarrow x = 0$ imposibil($x \neq 0$)…………………………………………….1p

Dacă $[x] = 1 \Rightarrow \{x\} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ 1p

3) Punctele distincte A, B, C, D sunt situate, în această ordine, pe dreapta d astfel încât $AB = 2BC = 3CD$. Dacă O este un punct arbitrar din plan și $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OD}$, unde $m, n \in \mathbb{R}$, determinați valoarea numărului $m + n$.

Focșani, Str. Dornei, nr. 5, tel. 0237214141, fax 0237214499

Soluție:

$\frac{AB}{6}=\frac{BC}{3}=\frac{CD}{2}=k \Rightarrow AB=6k, BC=3k, CD=2k \Rightarrow AD=11k$ 2p

$\frac{AB}{BD}=\frac{6}{5} \Rightarrow \overrightarrow{OB}=\frac{5}{11}\overrightarrow{OA}+\frac{6}{11}\overrightarrow{OD}$ și $\frac{AC}{CD}=\frac{9}{2} \Rightarrow \overrightarrow{OC}=\frac{2}{11}\overrightarrow{OA}+\frac{9}{11}\overrightarrow{OD}$ 4p

Deci, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\frac{18}{11}\overrightarrow{OA}+\frac{26}{11}\overrightarrow{OD} \Rightarrow m+n=\frac{44}{11}=4$ 1p

4. Fie $ABCD$ un paralelogram și punctele M, N *și* P astfel încât $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{DP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$. Arătați că centrul de greutate al triunghiului MNP se află pe dreapta AC.

Soluție: Fie G centrul de greutate al triunghiului $MNP \Rightarrow \overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\vec{0}$ (1)......................1p

$ABCD$ un paralelogram $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ (2)..1p

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{6}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{PG}$ 1p

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MG}$ 1p

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NG}=\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{NG}$ 1p

Adunând ultimele trei relații și folosind relațiile (1) și (2), obținem $3\overrightarrow{AG}=\frac{11}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{11}{6}\overrightarrow{AD}=\frac{11}{6}\overrightarrow{AC}$ ...1p

Deci vectorii $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC}$ sunt coliniari, de unde rezultă că punctele A,G,C sunt coliniare, prin urmare G se află pe dreapta AC...1p