Olimpiada Națională de Matematică Gazeta Matematică

Etapa locală, Focșani 10.02.2024

Soluții și Bareme Clasa a 12-a

Subiectul 1. Calculați $\int_{-2}^{-1} \frac{arctg(1-x)}{x}dx$

Soluție: Prin schimbare de variabilă t=-x și notând cu A integrala dată, avem :

$A=\int_{-2}^{-1} \frac{arctg(1-x)}{x}dx=-\int_{1}^{2} \frac{arctg(t+1)}{t}dt=-\ln t\cdot arct(t+1)\Big|_1^2+\int_1^2 \frac{\ln t}{t^2+2t+2}dt$ 2p

Dacă $B=\int_1^2 \frac{\ln t}{t^2+2t+2}dt$, prin $p=\frac{2}{t}, t=\frac{2}{p}$ obținem

$B=\int_1^2 \frac{\ln t}{t^2+2t+2}dt=\int_1^2 \frac{\ln 2-\ln p}{p^2+2p+2}dp=\ln 2\cdot artg(p+1)\Big|_1^2-B\Rightarrow B=\frac{\ln 2}{2}(arctg3-arct2)$ 3p

Finalizare cu $A=-\frac{\ln 2}{2}(arctg3+arctg2)=-\frac{\ln 2}{2}(arctg\frac{3+2}{1-3\cdot 2})=\frac{\pi}{8}\ln 2$ 2p

Subiectul 2. Calculați $I=\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx$

Soluție: Notăm $J=\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx$ 1p

Avem $J-I=\int \frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx=\int \frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{1+1+2\sin x\cos x}}dx=-\int \frac{(\sin x+\cos x)'}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}dx$ de unde

Deci $J-I=-\ln\left|\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}\right|+C$ 3p

Analog $J+I=\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx=\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{3-(1-2\sin x\cos x)}}dx=\int \frac{(\sin x-\cos x)'}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}dx$

Deci $J+I=arcsin\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}\right)+C$ 2p

Finalizare cu rezultatul pentru $I=\frac{1}{2}\left(arcsin\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}\right)+\ln\left|\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}\right|\right)+C$ 1p

Subiectul 3. Se consideră legea de compoziție “∗”, definită pe mulțimea numerelor reale prin

$$a*b=\begin{cases}\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx, & a\neq b\\ a\ , & a=b\end{cases}$$

. Să se arate ca legea nu este asociativă dar este comutativă pe $\mathbb{R}$.

Soluție: $\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx=\frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=\frac{a+b}{2}$ 2p

Deci $a*b=\frac{a+b}{2}$, pentru orice a,b numere reale 2p

Pentru justificarea * neasociativă $(a*b)*c=\frac{a+b+2c}{4}\neq\frac{2a+b+c}{4}=a*(b*c)$ 2p

Comutativitatea $a*b=\frac{a+b}{2}=\frac{b+a}{2}=b*a$, pentru orice numere a,b reale 1p

Subiectul 4. Arătați că grupurile $(\mathbb{Q}_+^*,\cdot)$ respectiv $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ nu pot fi izomorfe.

Soluție: Presupunem prin Reducere la Absurd că există o funcție cu proprietatea de a fi izomorfism $f:(\mathbb{Q}_+^*,\cdot)\to(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$, bijectiva cu $f(xy)=f(x)f(y)$ 1p

Cum există a din $\mathbb{R}_+^*$ cu $f(2)=a$, există si b din $\mathbb{R}_+^*$ cu $b^2=a$ 2p

Din proprietățile izomorfismului există x din $\mathbb{Q}_+^*$ cu $f(x)=b$ 1p

Deci $f^2(x)=f(x)\cdot f(x)=f(x^2)=b^2=a=f(2)$ 2p

Finalizare din f bijectivă vom avea $x^2=2$ cu x rațional ceea ce reprezintă o contradicție....................1p