

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală-10.02.2024

Clasa a XI-a

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

- a) Să se arate că A este matrice inversabilă și să se determine inversa ei A^{-1} .
b) Să se calculeze A^n , pentru $n \in \mathbf{N}^*$.

2. Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbf{R})$ și $X = AB - BA$ cu $\det(X) = -1$. Arătați că matricea $I_2 - X$ nu este inversabilă.

3. Fie numerele reale a, b, c . Să se calculeze limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a \sqrt{n^2 + n} + b \sqrt{n^2 + 2n} + c \sqrt{n^2 + 3n}).$$

4. Fie numerele reale a, b cu $a < b$. Se consideră șirurile $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$ definite prin:
 $x_1 = a, y_1 = b, x_{n+1} = \frac{4x_n + 7y_n}{11}, y_{n+1} = \frac{7x_n + 4y_n}{11}, n \in \mathbf{N}^*$.

Arătați că cele două șiruri sunt convergente, au aceeași limită și determinați această limită. (G.M. 10 / 2023)

NOTĂ: Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

Propunători:

prof. Pătrașcu Enache – C. N. „Unirea” - Focșani

prof. Bucur Mioara – C.E. “Mihail Kogălniceanu” - Focșani