OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 10.02.2024
Clasa a X-a

Subiectul 1.

Numerele complexe nenule a,b,c au același modul și verifică relația $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\in\mathbb{R}$. Arătați că $(a-b)(b-c)(c-a)=0$. (SGM 9/2023)

Barem:

Consider $a=r(\cos\alpha+i\sin\alpha), b=r(\cos\beta+i\sin\beta), c=r(\cos\gamma+i\sin\gamma)$ **1p**

$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)\right)+i\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)\right)$ **1p**

$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\in\mathbb{R} <=> \sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)=0$ **1p**

$\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)=-4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}$ **2p**

$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0 <=> \frac{\alpha-\beta}{2}=k\pi <=> \alpha=\beta+2k\pi <=> a=b <=> a-b=0$ **1p**

$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\in\mathbb{R} <=> (a-b)(b-c)(c-a)=0$ **1p**

Subiectul 2.

Fie $x,y\in(0,+\infty)-\{1\}$. Arătați că $\log_x y+\log_y x\geq 2$ dacă și numai dacă $xy+1>x+y$.

Barem:

Notăm $t=\log_x y => \log_y x=\frac{1}{t}$ **1p**

Atunci $\log_x y+\log_y x\geq 2 <=> t+\frac{1}{t}\geq 2 <=> \frac{(t-1)^2}{t}\geq 0 <=> t>0$ **2p**

$t>0 <=> \log_x y>0 <=> x,y>1$ sau $0<x,y<1$ **2p**

$xy+1>x+y <=> (x-1)(y-1)>0 <=> x,y>1$ sau $0<x,y<1$ **2p**

Subiectul 3.

a) Să se rezolve ecuația: $16^x+15^x=20^x+9^x$;

b) Să se rezolve inecuația: $16^x+15^x\geq 20^x+9^x$.

Barem:

a) $16^x+15^x=20^x+9^x <=> \left(4^x-3^x\right)\left(4^x+3^x-5^x\right)=0$ **1p**

$4^x-3^x=0 <=> x=0$ **1p**

$4^x+3^x-5^x=0 <=> \left(\frac{4}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x=1$ are solutia unică $x=2$ **1p**

b) $16^x+15^x \geq 20^x+9^x <=> (4^x-3^x)(4^x+3^x-5^x) \geq 0 <=>$ **1p**

1) $\begin{cases} 4^x-3^x \geq 0 \\ 4^x+3^x-5^x \geq 0 \end{cases} <=> \begin{cases} 4^x \geq 3^x \\ \left(\frac{4}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x \geq 1 \end{cases} <=> \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases} <=> x \in [0;2]$ **1p**

sau 2) $\begin{cases} 4^x-3^x \leq 0 \\ 4^x+3^x-5^x \leq 0 \end{cases} <=> \begin{cases} 4^x \leq 3^x \\ \left(\frac{4}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x \leq 1 \end{cases} <=> \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} <=> x \in \varnothing$ **1p**

$S=[0;2]$ **1p**

Subiectul 4.

Fie $f:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z)=z+|z|$.

a) Să se arate că f nu este injectivă;

b) Să se arate că f nu este surjectivă;

c) Să se afle $\operatorname{Im} f$.

Barem:

a) $f(0)=0=f(-1) => f$ nu este injectivă **1p**

b) $f(z)=i <=> a+bi+|a+bi|=i <=> b=1$ si $\sqrt{a^2+1}=-a$ **1p**

$\sqrt{a^2+1}=-a$ nu are soluții reale => $i \notin \operatorname{Im} f$ => f nu este surjectivă **1p**

c) Fie $a+bi \in \mathbb{C}$.

Ecuația $f(x+iy)=a+bi$ este echivalentă cu $y=b$ și $x+\sqrt{x^2+b^2}=a$

Dacă $b=0, a<0$ atunci ecuația nu are soluție **1p**

Dacă $b \neq 0, a \leq 0$ atunci ecuația nu are soluție

Dacă $b=0, a \geq 0$ atunci ecuația are soluție (pentru $a>0 => x=\frac{a}{2}$ și pentru **1p**

$a=0 => x \in (-\infty;0]$

Dacă $b \neq 0, a>0$ atunci ecuația are soluție $x=\frac{a^2-b^2}{2a}$ **1p**

Așadar $\operatorname{Im} f=\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z)>0\} \cup \{0\}$ **1p**