



**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ-VRANCEA**  
**08.02.2020**  
**CLASA A XI-A**

1. Fie matricea  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ , astfel încât  $\det(A^2 - 2I_2) = 0$ . Arătați că  $A^2 = 2I_2$  și  $\det A = -2$ .
2. Matricele  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  verifică relația  $AB = 2A + 3B$ . Să se arate că  $\text{rang}A = \text{rang}B$  și că matricele  $A - 3I_n, B - 2I_n$  sunt inversabile. (GM/2019)
3. Calculați limita  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(ex) \cdot \ln(ex^2) \cdot \dots \cdot \ln(ex^n) - 1}{x - 1}$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$ .
4. Dacă  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sunt două funcții periodice cu proprietatea că  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0$ , arătați că  $f(x) = g(x)$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ .

**NOTĂ:** Timp de lucru 3 ore.  
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

Probleme selectate de:  
prof. Daniela Sîrghie, Colegiul Național *Al. I. Cuza*, Focșani  
prof. Dănuț Emil Popoiu, Colegiul Național *Unirea*, Focșani