

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – VRANCEA, 08.02.2020

CLASA A VI-A

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. Arătați că mulțimile $A = \{6^n + 1, 6^n + 2, 5n + 3, 5n + 7 / n \in \mathbb{N}^*\}$ și $B = \{k^2 / k \in \mathbb{N}\}$ sunt disjuncte.

Barem:

$U(6^n) = 6$ 1p

$U(6^n + 1) = 7, U(6^n + 2) = 8$ 1p

$U(5n) \in \{0, 5\}$ 1p

$U(5n + 3) \in \{3, 8\}$ și $U(5n + 7) \in \{7, 2\}$ 1p

$U(x) \in \{2, 3, 7, 8\}, x \in A$ 1p

$U(k^2) \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$ 1p

$A \cap B = \emptyset$ 1p

2. Fie x, y, z numere raționale pozitive astfel încât $\frac{2x}{3y+4z} = \frac{3y}{2x+4z} = \frac{4z}{2x+3y}$. Stabiliți

valoarea raportului $\frac{x+3y+2z}{x+3y-2z}$.

Barem:

Notăm $2x=a, 3y=b, 4z=c$ și obținem

$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{2a+2b+2c} = \frac{1}{2}$ 2p

$2a=b+c, 2b=a+c, 2c=a+b$ 1p

$a=b=c$ 1p

$2x=3y=4z=k, k \text{ nenul} \Rightarrow x=\frac{k}{2}, y=\frac{k}{3}, z=\frac{k}{4}$ 1p

$\frac{x+3y+2z}{x+3y-2z} = \frac{\frac{k}{2} + k + \frac{k}{2}}{\frac{k}{2} + k - \frac{k}{2}} = \frac{2k}{k} = 2$ 2p

3. În jurul punctului O se consideră 9 unghiuri: $\sphericalangle A_0OA_1 = x^\circ$, $\sphericalangle A_1OA_2 = (2x+1)^\circ$, $\sphericalangle A_2OA_3 = (3x+2)^\circ$, ..., $\sphericalangle A_7OA_8 = (8x+7)^\circ$ și $\sphericalangle A_8OA_0 = (9x-n)^\circ$, unde x și n sunt numere naturale nenule. Determinați măsurile celor nouă unghiuri.

G.M.12/2019

Barem:

$$x^\circ + (2x+1)^\circ + (3x+2)^\circ + \dots + (8x+7)^\circ + (9x-n)^\circ = 360^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$45x + 28 - n = 360 \dots\dots\dots 2p$$

$$x = \frac{332+n}{45} \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 45 / 332 + n \Rightarrow 45 / 45 \cdot 7 + (17+n) \Rightarrow 45 / 17 + n \Rightarrow n \in \{28, 73, 118, \dots\} \dots\dots\dots 1p$$

$$n=28, x=8 : \text{unghiurile vor fi de măsuri: } 8^\circ, 17^\circ, 26^\circ, 35^\circ, 44^\circ, 53^\circ, 62^\circ, 71^\circ, 44^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$n=73, x=9 : \text{unghiurile vor fi de măsuri: } 9^\circ, 19^\circ, 29^\circ, 39^\circ, 49^\circ, 59^\circ, 69^\circ, 79^\circ, 8\dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Pentru } n \geq 118 \text{ se obține } 9x - n < 0 \dots\dots\dots 1p$$

4. Pe ulița ninsă a satului, tatăl îi conduce pe cei doi fii ai săi spre școală.

Ca să nu se ude la picioare prea tare, tatăl merge în față, apoi fiul cel mare și în spate fiul cel mic, copiii sperând să calce pe urmele celui din față.

Dacă lungimea drumului până la școală este de 600 de metri, lungimea pasului tatălui este de 80 cm, iar a fiilor de 60 cm, respectiv 40 cm, să se afle:

- De câte ori au călcat în același loc toți trei?
- Câți pași a făcut în zăpada neatinsă copilul cel mic?

Supliment G.M. 11/2019

Barem:

$$a) [80, 60, 40] = 240 \dots\dots\dots 1p$$

$$600m = 60.000 \text{ cm} \dots\dots\dots 1p$$

$$60.000 : 240 + 1 = 250 + 1 = 251 \text{ de ori au călcat în același loc toți trei (se numără și locul de plecare)} \dots\dots\dots 1p$$

$$b) 60.000 : 40 = 1500 \text{ pași face copilul mic} \dots\dots\dots 1p$$

$$[40, 60] = 120 \Rightarrow 60.000 : 120 = 500 \text{ calcă în același loc cei doi copii (după primul pas)} \dots\dots\dots 1p$$

$$[40, 80] = 80 \Rightarrow 60.000 : 80 = 750 \text{ calcă în același loc tatăl și fiul mic (după primul pas)} \dots\dots\dots 1p$$

$$1500 - 250 - (500 - 250) - (750 - 250) = 500 \text{ pași a făcut în zăpada neatinsă copilul cel mic} \dots\dots\dots 1p$$