



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI  
CERCETĂRII



**CONCURSUL NAȚIONAL  
Tehnici Matematice – ediția XVII  
Etapa județeană – 07 februarie 2020  
Profil Științele naturii**

**CLASA a IX a**

**Subiectul I** **(30 puncte)**

- a) Rezolvați ecuația:  $\left[\frac{x}{2}\right] = x - 3$
- b) Determinați perechea  $(x,y)$  pentru care: 
$$\begin{cases} [x] + \{y\} = 3,5 \\ x + [y] = 4,5 \end{cases}$$
- c) Demonstrați că  $a^2 + b^2 + 8 \geq 4(a + b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Subiectul al II-lea** **(30 puncte)**

- a) Mulțimea numerelor naturale impare se partiționează astfel:  
 $A_1 = \{1; 3\}, A_2 = \{5; 7; 9\}, A_3 = \{11; 13; 15; 17\}, \dots$ ;  
Mulțimea  $A_n$  conține astfel  $n+1$  numere naturale impare consecutive.  
Calculați suma elementelor mulțimii  $A_{15}$ .
- b) Arătați că dacă  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$  sunt în progresie geometrică, atunci și  $a+b, b+c, c+d$  au aceeași proprietate.
- c) Calculați suma  $S = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11 \dots 1}_{\text{de } n \text{ ori}}, n \in \mathbb{N}, n > 2$ .

**Subiectul al III-lea** **(30 puncte)**

- a) Determinați măsura, în radiani, a unghiului format de vectorii  $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$  și  $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$ .
- b) Se consideră un triunghi ABC având centrul de greutate G, ortocentrul H, centrul cercului circumscris O; se notează cu M mijlocul laturii (BC), iar cu N mijlocul segmentului (AG).
- Arătați că  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$  și  $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$
  - Determinați numărul rațional q pentru care  $\vec{NB} + \vec{NC} = q \cdot \vec{AM}$

Timp de lucru 2 ore.  
Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectele au fost propuse de:  
prof. Roxana Aron  
prof. Florin Dorian Smeureanu  
prof. Florentina Dicu  
Tehnoredactare: inf. Fuscil Ion Cristian

## Profil Științele naturii

BAREM - Clasa a IX a

- I. a)**  $x - 3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$  ..... 3 p  
 $x - 3 \leq \frac{x}{2} < x - 3 + 1 \Rightarrow x \in (4,6)$  ..... 5 p  
 Finalizare  $x \in \{5; 6\}$  ..... 2 p
- b)**  $\left. \begin{matrix} [x] \in \mathbb{Z} \\ \{y\} \in [0,1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow [x] = 3 \text{ și } \{y\} = 0,5$  ..... 4 p  
 $\left. \begin{matrix} [x] + \{x\} + [y] = 4,5 \\ [x] + [y] \in \mathbb{Z} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \{x\} = 0,5 \text{ și } [x] + [y] = 4$  ..... 4 p  
 $\Rightarrow [y] = 1 \Rightarrow y = 1,5 \text{ și } x = 3,5$  ..... 2 p
- c)**  $a^2 + b^2 + 8 \geq 4(a + b) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 8 \geq 4a + 4b$  ..... 2 p  
 $a^2 - 4a + 4 + b^2 - 4b + 4 \geq 0$  ..... 5 p  
 $(a - 2)^2 + (b - 2)^2 \geq 0$  (Adevarat) ..... 3 p
- II. a)** Primul element din  $A_n$  este  $a_n = n^2 + n - 1$  ..... 3 p  
 iar ultimul este  $b_n = n^2 + 3n - 1$  ..... 3 p  
 deci  $a_{15} = 239, b_{15} = 269$  ..... 2 p  
 Suma cerută este  $(1+3+5+\dots+269) - (1+3+5+\dots+237) = 135^2 - 119^2$  ..... 2 p
- b)**  $a, b, c, d \Rightarrow b^2 = a \cdot c; c^2 = b \cdot d \text{ și } a \cdot d = b \cdot c$  ..... 3 p  
 Calc.  $(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc$  ..... 3 p  
 Calc.  $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$  ..... 3 p  
 Finalizare:  $(b + c)^2 = (a + b)(c + d)$  ..... 1 p
- c)**  $S = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11 \dots 1}_n = (9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99 \dots 9}_n) \cdot \frac{1}{9}$  ..... 3 p  
 $= (10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + \dots + 10^n - 1) \cdot \frac{1}{9}$  ..... 3 p  
 $= (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n - n) \cdot \frac{1}{9}$  ..... 3 p  
 $= \left(10 \cdot \frac{10^n - 1}{9} - n\right) \cdot \frac{1}{9} = \frac{10^{n+1} - 10}{81} - \frac{n}{9}$  ..... 1 p
- III. a)**  $\Delta ABC$  dreptunghic ..... 5 p  
 $\sphericalangle \alpha = \frac{\pi}{2}$  ..... 5 p
- b)**  
 i)  $\vec{GA} + \vec{GC} = 2\vec{GM} \Rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{MG} + 2\vec{GM} = \vec{0}$  ..... 3 p  
 $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{AH}$  ..... 1 p  
 $\vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OM} \Rightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{AH} = 2\vec{OM} + \vec{OH}$  ..... 1 p  
 $AH \perp BC, OM \perp BC$   
 Fie  $D = S_O(A) \Rightarrow BHCD$  paralelogram ..... 2 p  
 $\Rightarrow M = \text{mij}(DH) \Rightarrow [OM] = \text{linie mijlocie în } \Delta AHD \Rightarrow AH = 2OM \Rightarrow \vec{AH} = 2\vec{OM}$  ..... 2 p  
 Finalizare ..... 1 p
- ii)  $\vec{NB} + \vec{NC} = 2\vec{NM}$  ..... 3 p  
 $\vec{NM} = \frac{2}{3}\vec{AM}$  ..... 3 p  
 $\vec{NB} + \vec{NC} = \frac{4}{3}\vec{AM} \Rightarrow q = \frac{4}{3}$  ..... 4 p

\* La orice soluție corectă se acordă punctaj maxim.  
 Se acordă 10 puncte din oficiu.