

CONCURSUL NAȚIONAL
Tehnici Matematice – ediția XVII
Etapa județeană – 07 februarie 2020
Profil Științele naturii

CLASA a X a

Subiectul I **(30 puncte)**

- a) Arătați că $\sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} = \sqrt{2} + 1$.
- b) Știind că numărul $(\sqrt{2} - 1)^{2018} + (\sqrt{2} + 1)^{2018}$ este natural, arătați că numărul $(\sqrt{2} - 1)^{2020} \cdot (3 + 2\sqrt{2}) + (\sqrt{2} + 1)^{2020} \cdot (3 - 2\sqrt{2})$ este natural.
- c) Rezolvați în \mathbb{R} ecuația: $(\sqrt{2} + 1)^x + (\sqrt{2} - 1)^{x-1} = 2 + \sqrt{2}$.

Subiectul al II-lea **(30 puncte)**

- a) Fie numerele reale a, b, x cu $x > 0$ și $x \neq 1$, unde:

$$a = \frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 8 \cdot \log_x 16} + \frac{1}{\log_x 32 \cdot \log_x 64}$$

$$b = \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \frac{1}{\log_x 16 \cdot \log_x 32} + \frac{1}{\log_x 64 \cdot \log_x 128}$$

- i) Comparați numerele a și b .
- ii) Știind că $a + b = \frac{3}{14}$, determinați x .
- b) Arătați că numărul $A = 2^{\log_2 1} + 2^{\log_2 3} + 2^{\log_2 5} + \dots + 2^{\log_2 91}$ este pătrat perfect.

Subiectul al III-lea **(30 puncte)**

Se dau numerele complexe $z_1 = a + bi$ și $z_2 = b + ai$ cu $a, b \in \mathbb{R}^*$.

- a) Arătați că $z_1 = \frac{i \cdot |z_2|^2}{z_2}$.
- b) Determinați numerele reale a și b pentru care are loc egalitatea:
 $3z_1 - 5z_2 = 2 - 2i$.
- c) Determinați numărul $n \in \mathbb{N}^*$, pentru care $(z_1 - iz_2)^n \cdot (\bar{z}_1 - i\bar{z}_2)^n \in \mathbb{R}$.

Timp de lucru 2 ore.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectele au fost propuse de:
prof. Elena Drăgan
prof. Simona Pozinărea
prof. Cătălin Pană
Tehnoredactare: inf. Fuscel Ion Cristian

Profil Științele naturii
BAREM - Clasa a X a

I. a) $\sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ 5 p

Finalizare5 p

b) $(\sqrt{2}-1)^{2020} = (\sqrt{2}-1)^{2018}(\sqrt{2}-1)^2 = (\sqrt{2}-1)^{2018}(3-2\sqrt{2})$4 p

$(\sqrt{2}+1)^{2020} = (\sqrt{2}+1)^{2018}(\sqrt{2}+1)^2 = (\sqrt{2}+1)^{2018}(3+2\sqrt{2})$2 p

Finalizare4 p

c) $(\sqrt{2}+1)^x + (\sqrt{2}-1)^x(\sqrt{2}+1) = 2 + \sqrt{2}$ 2 p

$(\sqrt{2}+1)^{2x} + (\sqrt{2}+1) = (2 + \sqrt{2})(\sqrt{2}+1)^x$ 1 p

$(\sqrt{2}+1)^x = t, t > 0$1 p

$t^2 - (2 + \sqrt{2})t + \sqrt{2} + 1 = 0$1 p

$t \in \{1, 1 + \sqrt{2}\}$3 p

$x \in \{0, 1\}$2 p

II. a)

i) $a = (\log_2 x)^2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)$3 p

$b = (\log_2 x)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right)$3 p

$a - b = (\log_2 x)^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7}\right) > 0$4 p

ii) $a + b = (\log_2 x)^2 \cdot \frac{6}{7}$4 p

$(\log_2 x)^2 = \frac{1}{4}$4 p

$x \in \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right\}$2 p

b) Aplicarea proprietății $a^{\log_a x} = x$2 p

$A = 1 + 3 + 5 + \dots + 91$4 p

$A = 46^2$4 p

III. a) $z_1 \cdot z_2 = i \cdot |z_2|^2$2 p

$z_1 \cdot z_2 = i(a^2 + b^2)$6 p

Finalizare.....2 p

b) $\begin{cases} 3a - 5b = 2 \\ -5a + 3b = -2 \end{cases}$4 p

$(a, b) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$6 p

c) $(z_1 - iz_2)^n = (2a)^n$2 p

$(\bar{z}_1 - i\bar{z}_2)^n = (-2ib)^n$2 p

$(z_1 - iz_2)^n \cdot (\bar{z}_1 - i\bar{z}_2)^n = (-4ab)^n \cdot i^n$2 p

$n \in \{4k, 4k + 2\}, k \in \mathbb{N}^*$4 p

* La orice soluție corectă se acordă punctaj maxim.

Se acordă 10 puncte din oficiu.