Profil Tehnologic și Economic administrativ

BAREM - Clasa a X-a

Subiectul I

a) Condiție de existență $\frac{2x-3}{1-x}>0 \Rightarrow x\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 2p

Notăm $\sqrt{\frac{2x-3}{1-x}}=t, t>0$ și ecuația devine $3t^2-10t+3=0$ cu soluțiile $t_1=\frac{1}{3}>0$ și $t_2=3>0$ 4p

Pentru $t=\frac{1}{3}\Rightarrow\sqrt{\frac{2x-3}{1-x}}=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{28}{19}\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 2p

Pentru $t=3\Rightarrow\sqrt{\frac{2x-3}{1-x}}=3\Rightarrow x=\frac{12}{11}\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 2p

b) $0,25\cdot 8^{3x-4}=\left(\frac{0,125}{\sqrt{2}}\right)^{-2x} \Leftrightarrow 2^{-2}\cdot\left(2^3\right)^{3x-4}=\left(\frac{2^{-3}}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2x}$ 4p

$\Leftrightarrow 2^{9x-14}=2^{7x}$ 4p

$x=7$ 2p

c) $2^{2\sqrt{x^2+3}}-2\cdot 2^{\sqrt{x^2+3}}-8=0$ 2p

Notăm $2^{\sqrt{x^2+3}}=t, t>0$ și obținem ecuația $t^2-2t-8=0$ cu soluțiile $t_1=4>0$ și $t_2=-2<0$ 4p

Pentru $t_1=4$ obținem $2^{\sqrt{x^2+3}}=4\Leftrightarrow\sqrt{x^2+3}=2\Leftrightarrow x_{1,2}=\pm1$ 2p

$x_1^2+x_2^2=2$ 2p

Subiectul II

a) $|z|=\left|\frac{\sqrt{4-\sqrt{13}}+i\sqrt{4+\sqrt{13}}}{\sqrt{3}-i\sqrt{5}}\right|^{2020}=\left(\frac{\left|\sqrt{4-\sqrt{13}}+i\sqrt{4+\sqrt{13}}\right|}{\left|\sqrt{3}-i\sqrt{5}\right|}\right)^{2020}$ 3p

$|z|=\left(\frac{\sqrt{\left(\sqrt{4-\sqrt{13}}\right)^2+\left(\sqrt{4+\sqrt{13}}\right)^2}}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(-\sqrt{5}\right)^2}}\right)^{2020}$ 3p

$|z|=1$ 4p

b) i. $z^2+z+1=0$ 5p

$z^3-1=(z-1)\left(z^2+z+1\right)=0\Rightarrow z^3=1$ 5p

ii. $z+\frac{1}{z}=\frac{z^2+1}{z}=-1$ 2p

$z^2+\frac{1}{z^2}=\frac{z^4+1}{z^2}=\frac{z+1}{z^2}=-1$ 2p

$z^3+\frac{1}{z^3}=2$ 2p

$\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(z^{30}+\frac{1}{z^{30}}\right)=\left[\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)\right]^{10}$ 2p

Rezultă că $\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(z^{30}+\frac{1}{z^{30}}\right)=2^{10}$ 2p

Subiectul III

a) $\log_{ctgx}\frac{1}{\sin x}=-\log_{tgx}\frac{1}{\sin x}$ 2p

$\log_{\frac{1}{\sin x}}\cos x=-\log_{\sin x}\cos x$ 2p

$\log_{\frac{1}{\cos x}}\sin x=-\log_{\cos x}\sin x$ 2p

$\log_{\cos x}\sin x+\log_{\sin x}ctgx+\log_{ctgx}\frac{1}{\sin x}+\log_{tgx}\frac{1}{\sin x}+\log_{\frac{1}{\sin x}}\cos x+\log_{\frac{1}{\cos x}}\sin x=\log_{\sin x}\frac{ctgx}{\cos x}=-1$ 4p

b) i. Justifică injectivitatea 3p

Justifică surjectivitatea 3p

Justifică bijectivitatea 1p

Funcția f este inversabilă și $f^{-1}:\mathbf{R}\setminus\{2\}\to\mathbf{R}\setminus\{2\},\ f^{-1}(x)=\frac{2x-1}{x-2}$ 3p

ii. $x\cdot f(x)-3\cdot f^{-1}(x)=2\Leftrightarrow(x-3)\cdot\frac{2x-1}{x-2}=2$ 3p

Ecuația devine $2x^2-9x+7=0$ 3p

Soluțiile sunt $x_1=1\in\mathbf{R}\setminus\{2\}$ și $x_2=\frac{7}{2}\in\mathbf{R}\setminus\{2\}$ 4p

Notă:

* La orice soluție corectă se acordă punctaj maxim.
Se acordă 10 puncte din oficiu.